2e EPREUVE DE MATHEMATIQUES TB

Durée : 2 h

Ce problème se compose de deux parties. Les candidats pourront utiliser les résultats fournis par l'énoncé et qu'ils n'ont pu démontrer, en le précisant chaque fois.

Pour tout nombre complexe $z = a + ib ((a,b) \in \mathbb{R}^2)$, on note $a = \mathcal{R}e(z)$ et $b = \mathcal{I}m(z)$

On conviendra dans la première partie, pour alléger la rédaction d'employer les mots "polynômes" ou "fraction rationelle", à la place de "fonctions polynômes" ou "fonction rationnelle".

Enfin, pour tout réel x, on note ω :

$$\omega = \text{Arctg } x.$$

PARTIE I

On définit deux suites de pôlynomes à coefficients réels par les relations

$$p_1(x) = x \; ; \qquad q_1(x) = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{cases} p_{n+1}(x) = p_n(x) + xq_n(x) \\ q_{n+1}(x) = -xp_n(x) + q_n(x) \end{cases}$$

On note r_n la fraction rationnelle $x \longmapsto r_n(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}$, et $z_n(x)$ le nombre complexe $z_n(x) = q_n(x) + ip_n(x)$

1°) a) Montrer que $z_n(x) = (1 + ix)^n$

b) En déduire $q_n(tg\omega)$, $p_n(tg\omega)$ et $r_n(tg\omega)$

c) Calculer les polynômes dérivés p'_n et q'_n en fonction de p_{n-1} et q_{n-1}

2°) Etudier la parité des fonctions p_n et q_n ainsi que leur degré. Expliciter les termes de plus haut degré dans p_n et dans q_n

3°) Calculer, selon la parité de n, la partie entière de la fraction r_n.

4°) Montrer que les polynômes p_n et q_n ont toutes leurs racines réelles distinctes (on utilisera I-1°-b et on distinguera selon la parité de n). En déduire que p_n et q_n sont premiers entre eux. Ecrire une factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ des polynômes p_n et q_n.

5°) Déterminer complètement les coefficients de la décomposition en éléments simples de la fraction r_n.

PARTIE II

Dans cette partie, on considère un plan affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle $\Gamma_n (n \geq 2)$ l'arc paramétré défini par

$$\begin{cases} x = q_n(u) \\ y = p_n(u) \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}$$

1°) Montrer qu'une équation de Γ_n en coordonnées polaires de pôle o et d'axe polaire $(o, \vec{i})$ est

$$\rho = \frac{1}{(\cos \frac{\theta}{n})^n} \qquad \left(-\frac{n\pi}{2} < \theta < n\frac{\pi}{2}\right)$$

2°) a) Reconnaître la nature géométrique de Γ_2

b) Représenter graphiquement Γ_4

3°) Pour $n > 3$, on appelle Ω et A_n les points de Γ_n d'angles polaires respectifs 0 et π et on note L_n la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\Omega A_n}$

a) Montrer que l'on a

$$L_n = n \int_0^{\pi/n} \frac{dt}{(\cos t)^{n+1}}$$

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} L_n$

4°) Montrer qu'en chacun de leurs points les courbes Γ_n tournent leur concavité vers le pôle. Calculer en fonction de θ, angle polaire d'un point M de Γ_n le rayon de courbure de Γ_n au point M (on supposera Γ_n orientée dans le sens des θ croissants).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail